

1. Znajdź sumy częściowe szeregu, a następnie zbadaj ich zbieżność:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{3^n}$.

2. Zbadaj zbieżność szeregu stosując kryterium porównawcze:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+6}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$
 e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+5n}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+4)(n+1)}$
 i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+2}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+3)(n+5)}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
 m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n$ o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sin \frac{1}{n}}$
 r) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ s) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$

3. Zbadaj zbieżność szeregu stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n-4^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}$
 e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{5^{n+1}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$
 i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} n}{\pi}\right)^n$
 ł) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{n\pi+2}{4n+3}$ m) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{n}\right)$ n) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$
 o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3) \cdot 4^{n+1}}{2^n \cdot 5^{n-1}}$ p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$ r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!}$
 t) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}$

4. Zbadaj zbieżność szeregów o wyrazach dowolnych, określ rodzaj zbieżności

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n-2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{10}}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{6n+10}{7n+30}\right)^n$
 g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
 j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$

Pomocne nierówności:

1. $\sin x < x$ dla $x > 0$
2. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
3. $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
4. $\operatorname{tg} x \leq \frac{4}{\pi}x$ dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$
5. $\ln x \leq x - 1$
6. $\ln x > 1$ dla $x \geq 3$